



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΓΙΑ ΜΙΑ ΜΙΚΡΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

**ΘΕΜΑ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1»

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  
 $f(g(x) - x) - f(\ln x + 1) = 0$ , για κάθε  $x > 0$

**i)** Να δείξετε ότι είναι  $g(x) = x + \ln x + 1$  και ότι είναι «1-1»

**ii)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g^{-1}(x)$

**iii)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, +\infty)$  ώστε να ισχύει  $g(x_0) = \frac{2017}{2016}$

**iv)** Να λύσετε την εξίσωση  $g^{-1}(3g(|x|+1) - 4) = 1$

**v)** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$

**ΘΕΜΑ**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο 3 για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{\eta\mu 2h} = \alpha, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

A) Να βρεθεί ότι  $f(3) = 0$

B) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 3$ .

Γ) Αν η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $M(3, f(3))$  διέρχεται από το σημείο  $N(1, -8)$  τότε

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$

Γ2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) \cdot \sqrt{x-2} - f(x)}{x^2 - 6x + 9}$

**ΘΕΜΑ**

Δίνεται συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(5x) - f'(2x)}{\eta\mu x} = 12$$

και οι εφαπτομένες των συναρτήσεων  $f$  και  $f'$  στα σημεία τους με τετμημένη 0, τέμνονται στο σημείο  $K(-1, -1)$ .

A) Να αποδείξετε ότι  $f''(0) = 4$

B) Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 2$  και  $f'(0) = 3$

**ΘΕΜΑ**

Αν για τη συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 4f(x) \cdot \eta\mu x = x^2 + 4\sigma\upsilon\nu^2 x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη ίση με 2.

Να βρείτε

α) Τον τύπο της  $f$ .

β) Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ορίζουμε  $g(x) = f(x) - 2 = 2\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 4} - 2$  να υπολογιστούν

β1) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$  και το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

γ) Να λυθεί για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  η ανίσωση

$$4\sqrt{x^2 + 4} \leq \sqrt{\pi^2 + 64} - 8\eta\mu x + 4\sqrt{2}$$

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ρίζα στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ενώ η  $g$

έχει μοναδική ρίζα το 0 στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$